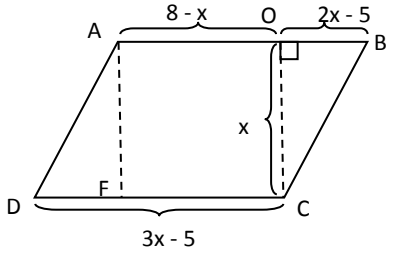
תרגילים נוספים בגאומטריה

המקבילית



1. נתונה מקבילית ABCD.

א. חשבו את x ואת אורך הצלע CD.

ב. חשבו את שטח המקבילית בשתי דרכים:

1) באמצעות נוסחת שטח מקבילית.

2) באמצעות מציאת שטחי כל הצורות המרכיבות אותה.

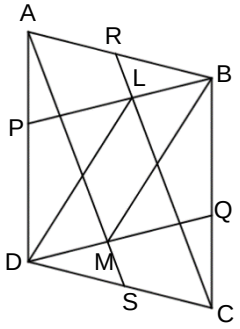
ג. חשבו את אורך הצלע BC.

2. ABCD - מקבילית. CH חוצה את הזווית ∡C.

א. הראו שהמשולש ΔHBC שווה-שוקיים.

ב. נתון: DC = 12 ס"מ, AH = 5 ס"מ, CH = 1.5 · AD. (הסרטוט מוקטן.)

חשבו את היקף המשולש ΔHBC.



3. המרובעים ABCD, ARCS ו- PBQD הם מקביליות.

L נקודת המיפגש של PB ו- RC.

M נקודת המיפגש של AS ו- DQ.

הוכיחו שהמרובע LBMD אף הוא מקבילית.

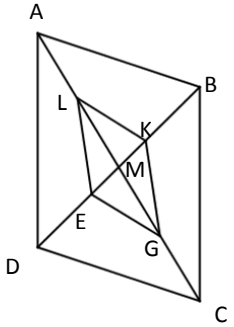
4. מה אם לא?

אלכסוני המקבילית ABCD נפגשים בנקודה M.

אם ידוע: AL = DE = CG = BK (ראו סרטוט).

אז המרובע LKGE הוא מקבילית.

ומה אם לא כולם שווים זה לזה?



א. איזה מרובע יתקבל אם ידוע ש DE = KB וגם AL = GC אבל GC ≠DE ? הוכיחו.

ב. איזה מרובע יתקבל אם ידוע ש DE = GC וגם KB = AL אבל AL≠DE ? הוכיחו.

תשובות:

1. א. x=4, 7 ס"מ = CD **ג.** 5 ס"מ

2. ב. 24.5 ס"מ

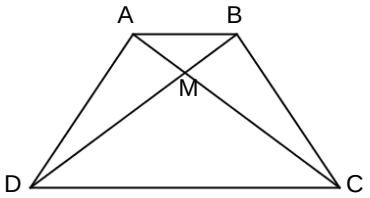
4. א. במקרה זה LKGE עדיין יהיה מקבילית. **ב.** בתנאים אלו המרובע LKGE יהיה טרפז, לא מקבילית.

טרפז שווה שוקיים

5. ABCD טרפז שווה-שוקיים שאלכסוניו מאונכים זה לזה. גובה הטרפז הוא m.

א. בטאו באמצעות m את שטח הטרפז.

ב. בטאו באמצעות m את אורך אלכסון הטרפז. נסו לענות ביותר מאשר דרך אחת.



6. ABCD טרפז שווה-שוקיים. M מפגש האלכסונים. לכל אחד מן השוויונות הבאים רשמו אם הוא מתקיים תמיד, לפעמים או שאינו יכול להתקיים:

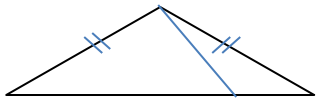
א. AB = CD **ב.** AM = MD **ג.** AM = MB

ד. AD = AC **ה.** AB = AD **ו.** AM =AB

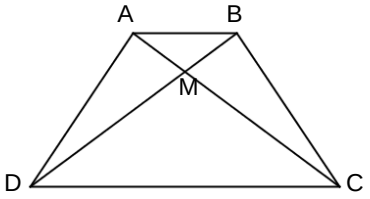
צלעות וזוויות במשולש

האם הטענה הבאה נכונה?

7. אם שתי צלעות במשולש אחד שוות לשתי צלעות במשולש אחר, ואם הזווית שמול אחת הצלעות במשולש האחד שווה לזווית המתאימה לה במשולש האחר, אזי שני המשולשים חופפים זה לזה?



8. ABCD טרפז שווה-שוקיים. M מפגש האלכסונים.
הוכיחו: AB + AD >AC.



9. במשולש ΔABC נתון AB = 2BC. האם ניתן להסיק ש-
∡ACB = 2·∡BAC? הוכיחו או הפריכו.

תשובות:

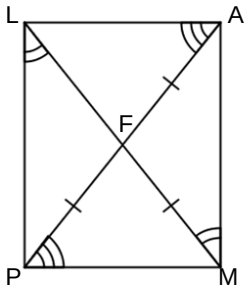
8. לפי אי-שוויון המשולש: AB + AD > BD = AC

9. לא ניתן להסיק. למשל, במשולש ישר זווית ושווה-שוקיים הזווית הישרה גדולה פי 2 מהזוויות החדות אבל היתר לא גדולה פי 2 מהניצבים. מצב זה היה עומד בסתירה לאי שוויון המשולש. כמו כן, ניתן להראות באמצעות משפט פיתגורס שהיתר גדולה פי $\sqrt{2}$ מהניצב.

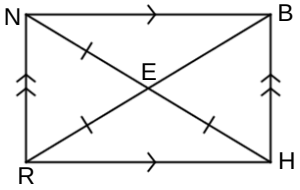
המלבן

10. בכל אחד מהסעיפים שלפניכם נתון מרובע. הוכיחו בעזרת הנתונים בסרטוט כי המרובע הוא מלבן .

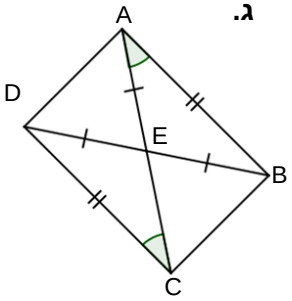
א.



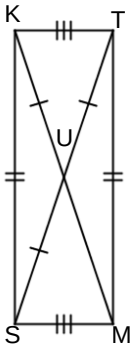
ב.



ג.



ד.



תרגיל זה מבוסס על שימוש במשפט:

אם במשולש התיכון לצלע שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, אז המשולש הוא ישר-זווית.

נדגים פתרון מלא על סעיף א: ∡PAL = ∡APM, זוויות מתחלפות שוות ולכן: LA II PM.

∡PLM = ∡AML, זוויות מתחלפות שוות ולכן: LP II AM. קיבלנו מרובע עם שני זוגות של לצלעות מקבילות ולכן מקבילית.

FM = PF = AF לפי המשפט: אם במשולש התיכון לצלע שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, אז המשולש הוא ישר-זווית.

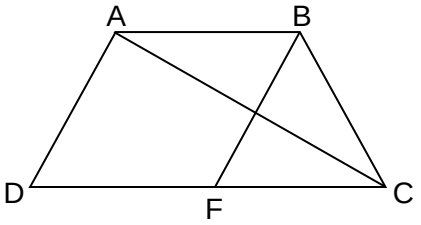
$\measuredangle M = 90^0$. מקבילית בעלת זווית ישרה היא מלבן.

סעיף ב: באופן דומה, יש לנו מקבילית כי נתונים שני זוגות של צלעות מקבילות. כמו כן, יש לנו תיכון ליתר השווה למחציתו ולכן הזווית R היא זווית ישרה ולכן מלבן.

סעיף ג: יש לנו זוג צלעות שוות ומקבילות ולכן מקבילית. כמו כן, יש לנו תיכון ליתר השווה למחציתו ולכן הזווית A היא זווית ישרה ולכן מלבן.

סעיף ד: יש לנו שני זוגות של צלעות נגדיות ושוות ולכן מקבילית. כמו כן, יש לנו תיכון ליתר השווה למחציתו ולכן הזווית K היא זווית ישרה ולכן מלבן.

מעוין



11. נתון טרפז שווה-שוקיים ABCD (AB II DC).

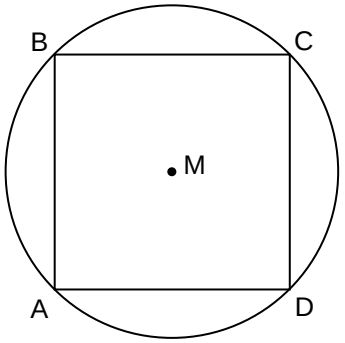
נתון: ABFD מעוין. $DC = 2 \cdot DF$.

הוכיחו:

א. $\measuredangle ABF = 2 \cdot \measuredangle ACB$.

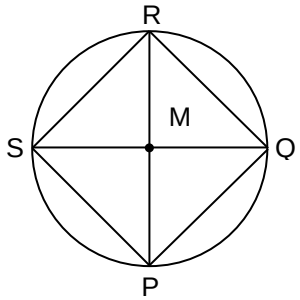
12. בנו מעוין על פי אלכסוניו m ו- 2m

ריבוע

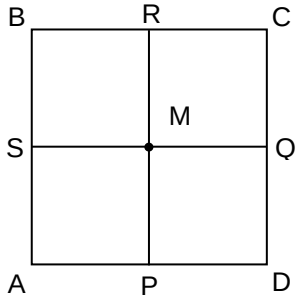


13. לפניכם סרטוט בו מעגל חוסם ריבוע. אורך צלע הריבוע היא a.
האם ניתן לחשב את שטח המעגל? אם כן, כיצד? מה שטח המעגל?

14. נתון מעגל בו סרטטו שני קטרים המאונכים זה לזה ($RP \perp SQ$).
חיברו את ארבעת הנקודות שהתקבלו על המעגל כך שיתקבל מרובע RQPS.
הוכיחו שהמרובע RQPS הוא ריבוע.



15. חברו בריבוע ABCD את האמצעים של הצלעות הנגדיות
כמודגם בסרטוט.



א. הוכיחו כי נוצרו ארבע ריבועים חופפים זה לזה.

ב. הוכיחו כי מרובע RCPA הוא מקבילית.

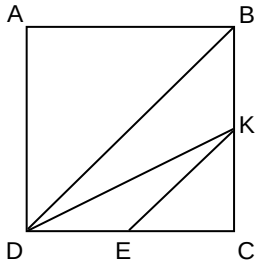
ג. הוכיחו כי נקודה M היא מפגש האלכסונים של הריבוע.

ד. הוכיחו כי מעגל שמרכזו ב- M, העובר דרך הקדקוד C, עובר דרך שלושת הקדקודים האחרים של הריבוע.

ה. הסבירו מדוע מעגל שמרכזו ב- M ומחוגו שווה ל- MQ עובר גם בנקודות R, S, ו- P, וחשבו את היחס בין השטח של מעגל זה לשטח המעגל המופיע בסעיף ד.

קטע אמצעים במשולש

16. המרובע ABCD הוא ריבוע.
DK הוא תיכון במשולש ΔBCD. EK הוא תיכון במשולש ΔCDK.



א. איזה סוג של מרובע הוא המרובע BDEK?
בחרו את התשובה הנכונה ונמקו את בחירתכם:
טרפז ישר זווית, מקבילית, טרפז שווה שוקיים, דלתון,
מרובע מסוג אחר.

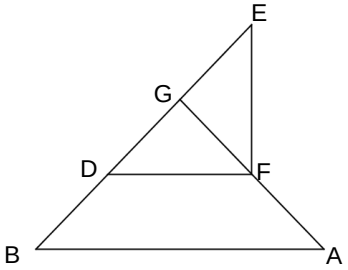
ב. חשבו את זוויותיו של המרובע BDEK.

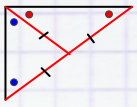
ג. נתון: 3.5 ס"מ = EK. מהו אורכו של הקטע AC?

התבוננו במשולש ΔBDC.

17. נתון: ΔGBA הוא משולש שווה שוקיים, GB = GA.
FD - קטע אמצעים.
FG הוא תיכון במשולש ΔDEF.

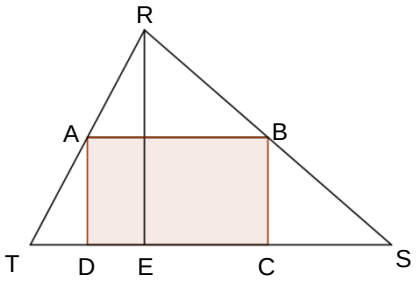
הוכיחו: $\measuredangle EFD = 90^o$.





תזכורת: אם במשולש התיכון לצלע שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה אז המשולש הוא ישר זווית

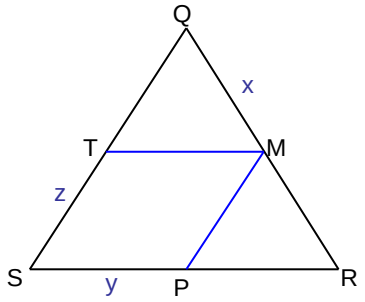
* **18.** RE - גובה לצלע TS במשולש ΔTRS.
AB - קטע אמצעים במשולש.
הנקודות C ו- D הן אמצעי הקטעים SE ו- TE בהתאמה.



א. הוכיחו: המרובע ABCD הוא מלבן.

ב. נתון: 10 ס"מ = TS, 6 ס"מ = RE.
חשבו את היקף המלבן ABCD.

* **19.** TM ו- MP הם קטעי אמצעים במשולש ΔSQR.
היקף המשולש ΔSQR שווה ל- 44 ס"מ.
היקף המרבוע STMP שווה ל- 34 ס"מ.



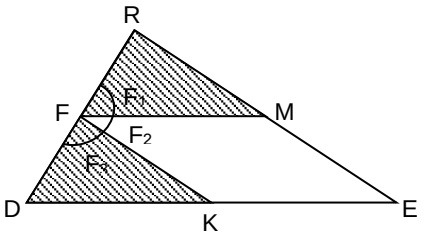
א. חשבו את אורך הצלע QR.

הדרכה: נכניס משתנים z, y, x כדי לסמן את אורכי חצי צלעות המשולש (ראו סרטוט). היעזרו בסימונים אלה ובטאו בעזרתם את שאר נתוני השאלה.

ב. חשבו את היקף המשולש ΔTQM.

לעיתים נתוני השאלה אינם מאפשרים לגלות אורכים של קטעים מסוים, אך ניתן לדעת משהו על ה**סכום** או על ה**הפרש** שלהם.

20. בתוך משולש ΔRDE חסומים שני המשולשים חופפים:
ΔRFM ו- ΔFDK. (ΔRFM ≅ ΔFDK).



א. הוכיחו ש- FM ll DE.

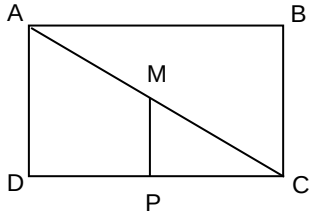
ב. הוכיחו ש- FM הוא קטע אמצעים.

ג. הוכיחו שהנקודה K היא אמצע הקטע DE.

ד. הוכיחו שהמרובע FMEK הוא מקבילית.

ה. האם KM הוא קטע אמצעים? אם כן, הוכיחו. אם לא, הסבירו מדוע.

21. במקבילית ABCD נתון: CD = 12 ס"מ, AD = 9 ס"מ, AC = 15 ס"מ.
M אמצע האלכסון AC, MP ⊥ DC.



א. הוכיחו שהמקבילית ABCD היא מלבן.

ב. מהו המרובע AMPD שנוצר? נמקו.

ג. חשבו את היקף המרבוע AMPD ואת שטחו.

* **22.** נתון משולש ΔABC. BD - תיכון לצלע AC. דרך הנקודה D העבירו מקביל לצלע AB שחותך את הצלע BC בנקודה E.

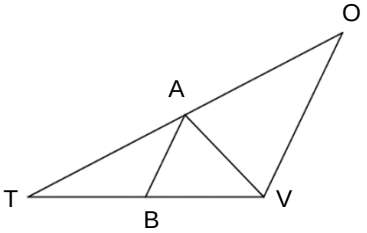
א. סרטטו סרטוט מתאים לבעיה ורשמו את הנתונים בכתיב מתמטי.

ב. הוכיחו שהנקודה E היא אמצע הצלע BC.

תשובות:
19. א. 7 ס"מ **ב.** 22 ס"מ

23. במשולש ΔTOV הנקודה B היא אמצע הצלע TV.

$BA \parallel VO$.



א. הוכיחו: AV הוא תיכון לצלע TO.

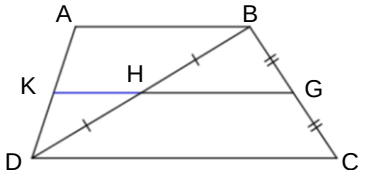
ב. נתון: שטח המשולש ΔBAT הוא 4 סמ"ר (הסרטוט מוקטן). מצאו את שטח המשולש ΔAOV.

24. נתון: ABCD טרפז ($AB \parallel CD$). G - אמצע הצלע BC,
H - אמצע האלכסון BD (ראו סרטוט).

המשך הקטע GH פוגש את הצלע AD בנקודה K.

צריך להוכיח: KH - קטע אמצעים במשולש ΔADB.

הדרכה:



א. הוכיחו: $GH \parallel CD$.

ב. הוכיחו: $GH \parallel AB$.

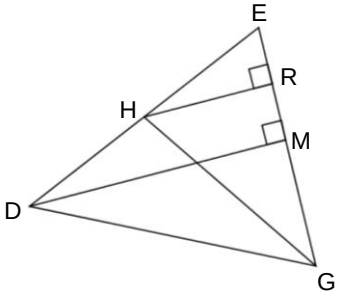
ג. הוכיחו: $AK = KD$.

25. במשולש ΔDEG נתון: GH - תיכון לצלע DE.

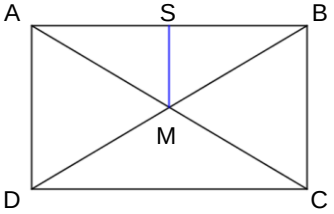
DM - גובה לצלע EG.

HR - גובה לצלע EG במשולש ΔEHG.

הוכיחו: $RM = ER$.



26. נתון מלבן ABCD. אלכסוני המלבן נפגשים בנקודה M.
דרך הנקודה M מעבירים מקביל לצלע AD:
$SM \parallel AD$.



א. הוכיחו: S היא אמצע הצלע AB.

ב. איזה סוג של מרובע הוא ASMD?

ג. אורכי צלעות המלבן הם 24 ס"מ = BC, 32 ס"מ = DC. מצאו את היקף המרובע ASMD ואת שטחו.

27. חקירה

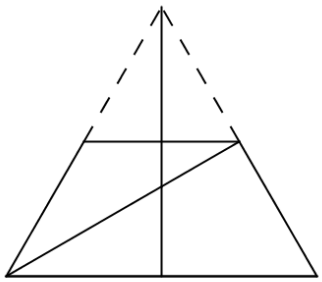
התבוננו בנתונים של השאלה הקודמת. בסעיף א הוכחתם שהנקודה S היא אמצע הצלע AB.

חקרו: כיצד תשתנה התשובה לסעיף א אם המרובע ABCD יהיה מעוין? טרפז שווה שוקיים? דלתון? מקבילית?

א. סרטטו סרטוט מתאים עבור כל אחד מהמרובעים. רשמו מה נתון ומה נדרש לבדוק.

ב. סכמו את הממצאים שלכם. האם תוכלו לזהות מהי התכונה המשותפת לכל המקרים בהם הנקודה S היא אמצע הצלע AB?

28. נתון קטע a.



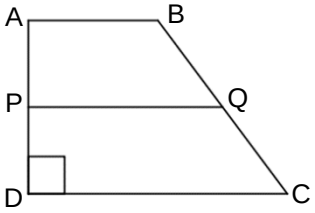
א. בנו טרפז ABCD (AB II DC) שבו: DA = AB = BC = a; DC = 2a.

ב. האריכו את שוקי הטרפז עד שהן נפגשות בנקודה P. מהנקודה P הורידו אנך ל-DC.

הוכיחו: ΔPMR ~ ΔDMG. נסו להוכיח את הטענה בדרכים אחדות.

קטע האמצעים בטרפז

29. ABCD טרפז ישר-זווית (∡A = ∡D = 90°).



P ו- Q אמצעי השוקיים.

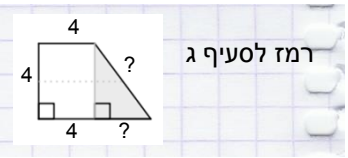
נתון: AB = 3 ס"מ, AD = 4 ס"מ, DC = 6 ס"מ. הסרטוט מוקטן.

א. הוכיחו שהמרובע ABQP הוא טרפז.

ב. חשבו את אורך הקטע PQ.

ג. חשבו את אורך היתר BC.

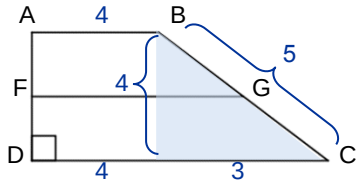
ד. חשבו את היקף הטרפז ABPQ.



תשובות:

29. א. PQ קטע אמצעים של הטרפז הנתון. PQ II AB ואילו הצלעות AP ו- BQ אינן מקבילות, כי הן שוקיים של הטרפז הנתון.

30. ABCD טרפז ישר-זווית ($\measuredangle A = \measuredangle D = 90°$).



F ו- G אמצעי השוקיים.

נתון: 4 ס"מ = AB = AD, 7 ס"מ = DC. הסרטוט מוקטן.

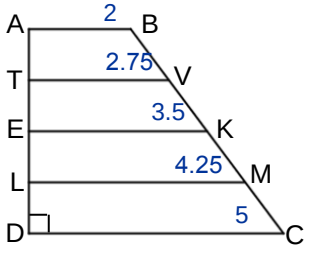
א. הוכיחו שהמרובע ABGF הוא טרפז.

ב. חשבו את אורך הקטע GF.

ג. חשבו את שטח הטרפז ABGF.

ד. חשבו את היקף המרובע FGCD.

31. ABCD טרפז .



חילקו כל אחת משוקי הטרפז ל- 4 חלקים שווים.

נתון: 2 ס"מ = AB; 5 ס"מ = DC. הסרטוט מוקטן.

א. חשבו את אורכי הקטעים TV, EK ו- LM. (אין צורך לחשב לפי הסדר!)

ב. הראו שסכום הקטעים TV ו- LM שווה לסכום הבסיסים של הטרפז.

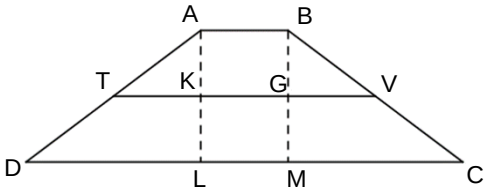
ג. ללא הנתונים המספריים הוכיחו: סכום אורכי הקטעים TV ו- LM שווה לסכום אורכי הבסיסים של הטרפז.

תשובות:

30. א. FG קטע אמצעים של הטרפז הנתון. FG II AB ואילו הצלעות AF ו- BG אינן מקבילות, כי הן שוקיים של הטרפז הנתון.

ב. 5.5 ס"מ. **ג.** 9.5 סמ"ר. **ד.** 17 ס"מ. כאן אנחנו נדרשים לחלוקת הטרפז למלבן ומשולש ישר-זווית ולשימוש במשפט פיתגורס.
כך נגלה שאורך היתר של הטרפז המקורי 5 ס"מ, מחציתו 2.5 ס"מ.

31. ב. חישוב מספרי. **ג.** אפשר לבטא את הבסיס העליון והבסיס התחתון כ- x ו- y ולבטא את כל הקטעים המקבילים להם באמצעות x ו- y. דרך אחרת, מתאימה לתלמידים חזקים: $EK = \frac{AB+DC}{2} \Rightarrow AB+DC = 2\cdot EK$. $EK = \frac{TV+LM}{2} \Rightarrow TV+LM = 2\cdot EK$



32. ABCD טרפז שווה-שוקיים (AB II DC). BM ו- AL גבהים בטרפז. הנקודות T ו- V הן בהתאמה אמצעי השוקיים BC ו- AD. 2AL ו- BM גבהים בטרפז. AB = 6 ס"מ, DC = 10 ס"מ, AD = BC = 5 ס"מ.

א. חשבו את אורך הקטע MC.

ב. חשבו את גובה הטרפז.

ג. הוכיחו שהמרובע ABVT הוא טרפז שווה-שוקיים.

ד. הוכיחו: BG = GM. על פי המשפט ההפוך למשפט קטע האמצעים במשולש VG קטע אמצעים במשולש

ה. חשבו את שטח הטרפז ABVT .

33. בטרפז שווה-שוקיים AFOR (AF II RO) נתון כי $AO \perp FR$.

א. הוכיחו כי שטח הטרפז שווה ל- $\frac{(AF+RO)^2}{4}$

ב. הוכיחו: $AO = \frac{(AF+RO)\sqrt{2}}{2}$.

34. ABCD טרפז שווה שוקיים שאלכסוניו מאונכים זה לזה.
גובה הטרפז הוא m.

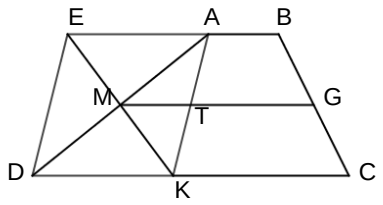
א. בטאו באמצעות m את שטח הטרפז.

ב. בטאו באמצעות m את אורך אלכסון הטרפז. נסו לענות ביותר מאשר דרך אחת.

תשובות:

32. א. MC =(DC-AB)/2= 4 ס"מ **ב.** 3 ס"מ. לפי משפט פיתגורס במשולש ΔBMC .
ג. AB II TV לפי משפט קטע האמצעים בטרפז. המרובע לא יכול להיות מקבילית כי TV >AB ולכן הוא טרפז. כל שוק אורכה מחצית של שוק הטרפז הנתון ולכן השוקיים שוות. **ד.** ΔBMC. **ה.** 18 סמ"ר =3/2·(2+ 10)
33. א. כיוון שבטרפז כזה הגובה שווה לקטע האמצעים, וקטע האמצעים שווה למחצית סכום הבסיסים, נקבל את הביטוי כשנציב את סכום הבסיסים והגובה בנוסחת שטח הטרפז.

35. המרובע ABCD הוא טרפז. המרובע EAKD הוא מקבילית.
שאלכסוניה נפגשים בנקודה M. הקטע MG מקביל ל- DC
ונפגש עם הקטע AK בנקודה T.



הוכיחו:

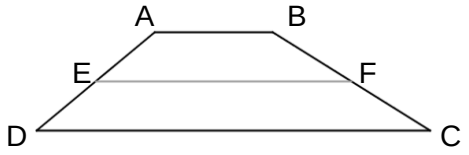
א. BG = GC.

ב. AT = TK.

36. ABCD טרפז שווה-שוקיים (AB II DC). E אמצע השוק AD.

המרובע ABFE אף הוא טרפז.

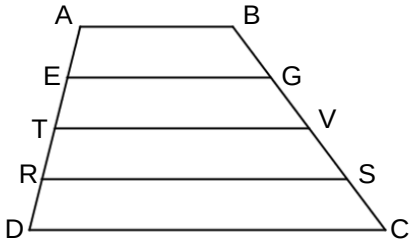
הוכיחו שכל אחד מהמרובעים ABFE ו- EFCD הוא טרפז שווה-שוקיים.



37. הקטעים EG, TV, ו- RS מקבילים לבסיסי הטרפז ABCD.

נתון כי AE = ET = TR = RD .

הוכיחו: BG = GV = VS = SC.



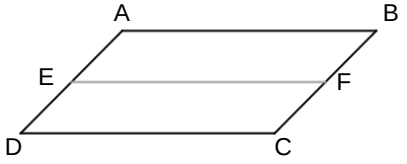
תשובות:

35. א. כיוון שאלכסוני המקבילית חוצים זה את זה, הקטע MG הוא קטע האמצעים בטרפז ABCD כי הוא יוצא מאמצע שוק ומקביל לבסיסי הטרפז.
ב. MT יוצא מאמצע הצלע AD של המשולש ADT ומקביל לצלע DK. לכן זהו קטע אמצעים במשולש.

36. לפי הנתון הקטע EF יוצא מאמצע השוק AD ומקביל לבסיסים. לכן הוא חוצה את השוק BC. מכאן שהקטעים AE, ED , BF, ו- FC שווים כחצאים של שוקי הטרפש, ומכאן ששני הטרפזים ABFE ו- EFCD שווי-שוקיים.

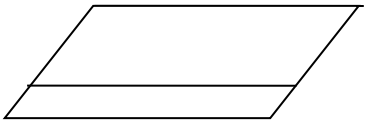
37. התוצאה נובעת מכך ש- TV קטע האמצעים בטרפז ABCD, EG קטע האמצעים בטרפז ABVT ו- RS קטע האמצעים בטרפז TVCD.

38. גם במקבילית!



א. הוכיחו: קטע המחבר את האמצעים של שתי צלעות נגדיות של מקבילית מקביל לשתי הצלעות האחרות ושווה למחצית סכומן.

ב. האם גם ההיפך נכון? האם כל קטע שקצותיו על שתי צלעות נגדיות של מקבילית והוא מקביל לצלעות האחרות ושווה למחצית סכומן הוא קטע אמצעים במקבילית (כלומר, קטע שמחבר את האמצעים של שתי צלעות נגדיות במקבילית)?



תשובות:

38. א. המרובע ABFE מקבילית לפי זוג צלעות שוות ומקבילות. מכאן ש- EF מקביל לשתי הצלעות AB ו- DC. כיוון ש- EF = AB = DC אנחנו מקבלים ש- EF שווה למחצית סכום אורכי הצלעות AB ו- DC.

ב. לא נכון. דוגמה נגדית :